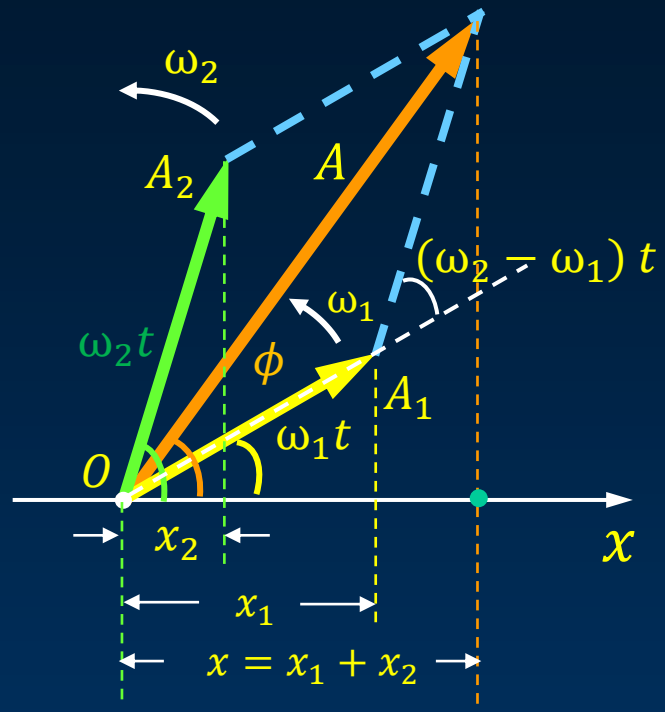
二、同方向不同频率谐振动的合成　拍

分振动：$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t \end{cases}$

合振动：$x = x_1 + x_2$

合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$



当 $(\omega_2 - \omega_1)\, t = 2k\pi$ 时，

A 有最大值：$A = A_1 + A_2$

当 $(\omega_2 - \omega_1)\, t = (2k+1)\,\pi$ 时，A 有最小值：$A = |A_1 - A_2|$

- **结论：** 合振动 x 不再是简谐振动，合振动振幅的频率为

$$(\omega_2 - \omega_1)\, T = 2\pi \qquad v = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |v_2 - v_1|$$

◆ 振幅相同不同频率的简谐振动的合成

分振动：

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t \end{cases}$$

合振动：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t$$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t$$

当 $\omega_2 \cong \omega_1$ 时，$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$，令 $x = A(t)\cos\overline{\omega}\, t$

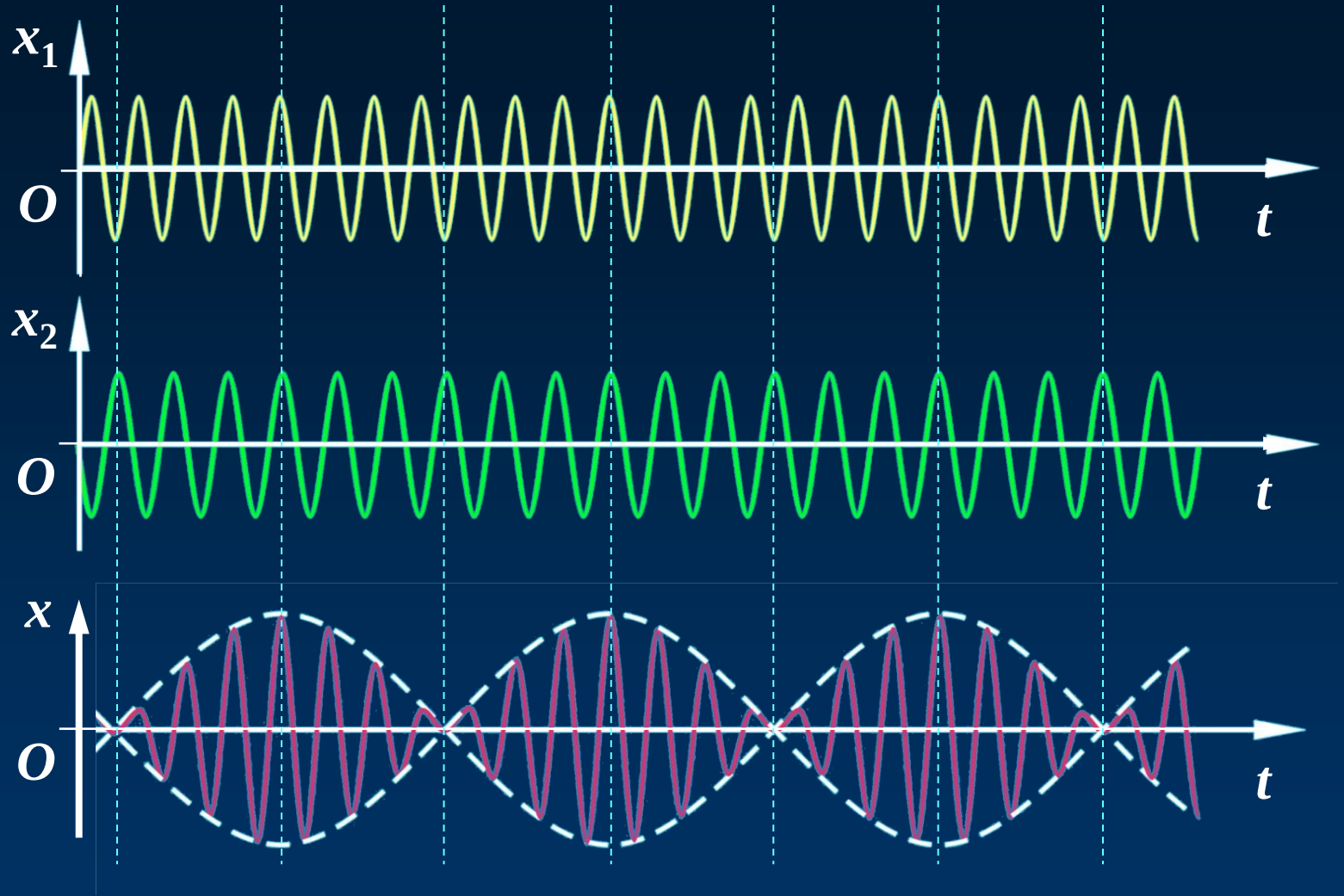
其中 $A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)$ 随 t 缓变

$\cos\overline{\omega}\, t = \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t)$ 随 t 快变

➢ **结论：合振动 x 可看作是振幅缓变的简谐振动。**

❖ 拍的现象

拍的周期是白色曲线周期的一半



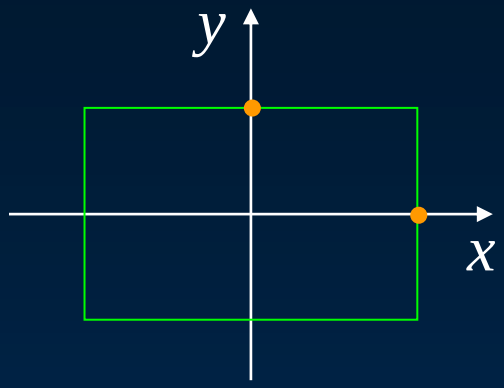
拍频：单位时间内合振动振幅强弱变化的次数

即： $\nu = |(\omega_2 - \omega_1)/(2\pi)| = |\nu_2 - \nu_1|$

拍原理的应用

三、两个相互垂直谐振动的合成 李萨如图

1. 两个同频率相互垂直的谐振动的合成



分振动

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \phi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

合运动

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)$$

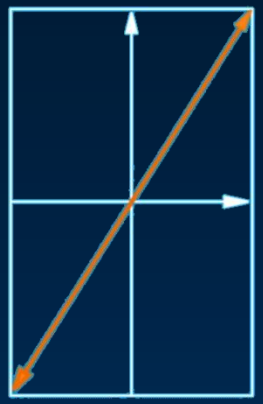
📖 **讨论** 当 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} \pm 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2} = 0$$

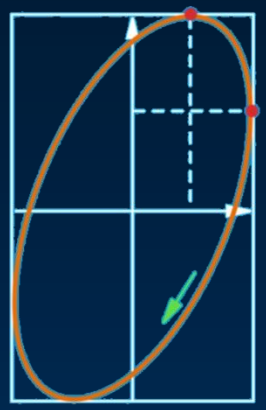
当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi/2$ (k为整数)时,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

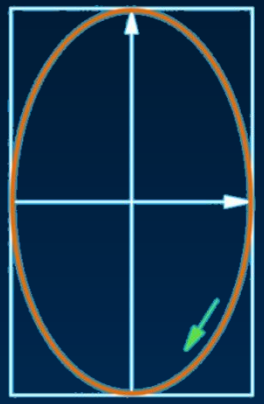
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\phi_2-\phi_1)=\sin^2(\phi_2-\phi_1)$$



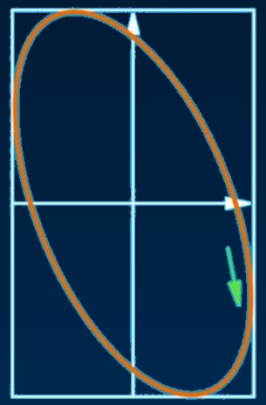
$\Delta\varphi = 0$



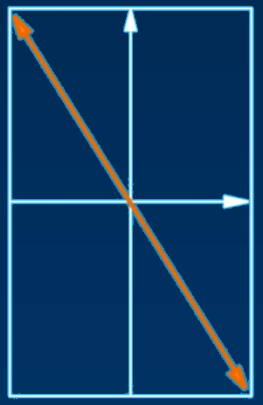
(第一象限)



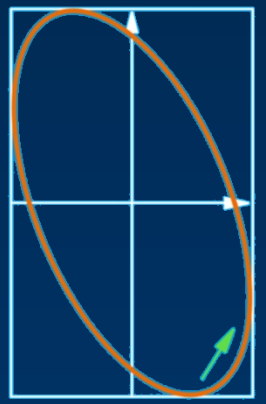
$\Delta\varphi = \pi/2$



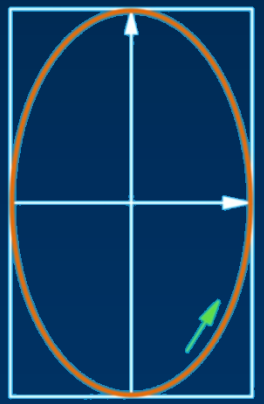
(第二象限)



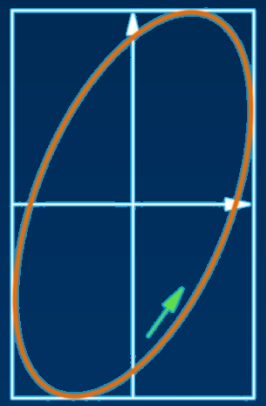
$\Delta\varphi = \pi$



(第三象限)



$\Delta\varphi = 3\pi/2$



(第四象限)

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$

*2. 两个不同频率、相互垂直的谐振动的合成

分振动 $\begin{cases} x = A_1 \cos \omega_1 t \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \end{cases}$

➢ **结论：**

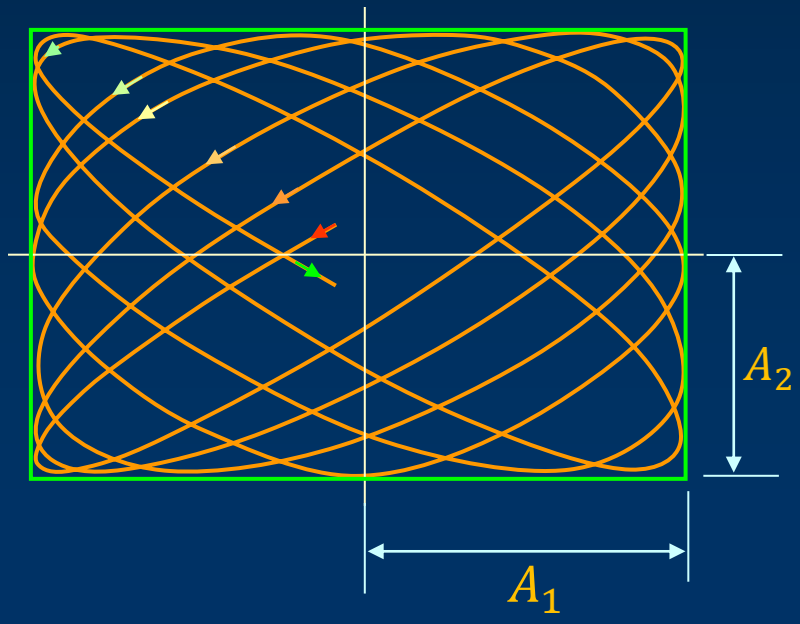
(1)ω_1、ω_2 之比为整数比时：

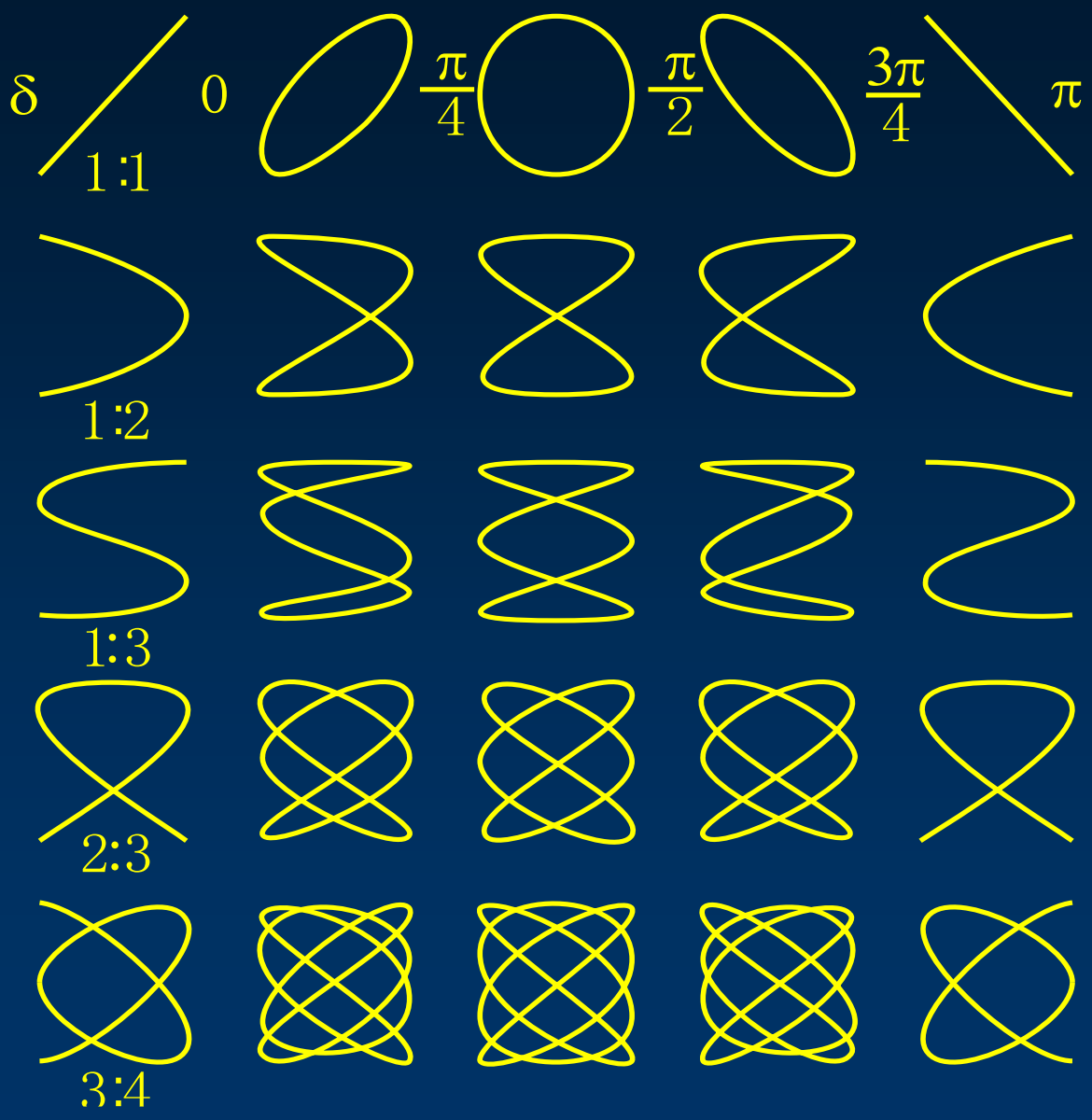
合成运动仍是周期运动，

(2)ω_1、ω_2 之比不为整数比时：

合成运动为非周期运动，

运动的轨迹为永不闭合的.




δ
0
π/4
π/2
3π/4
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4

四、谐振分析

- 将一个复杂的周期性振动分解为许多谐振动之和的方法

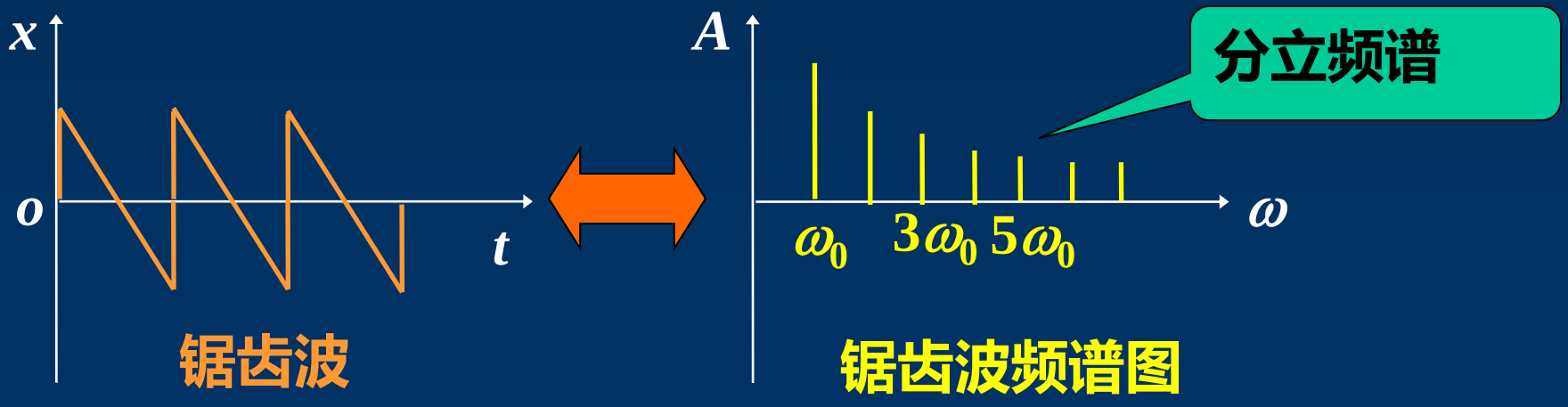
$x(t)$ ➡ 求各谐振动的频率和振幅关系 —— 傅立叶分析

傅立叶级数

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega t+\phi_k)]$$

➡ 各分振动的频率为: ω, 2 ω, 3 ω,…

(基频 , 二次谐频 , 三次谐频 , …)



13-3 阻尼振动　受迫振动

一、阻尼振动 (damped vibration)

- 简谐振动 —— 无阻尼振动 —— 理想情况
- 阻尼振动 —— 系统在回复力和阻力作用下减幅振动

实验指出： 当运动速度不太大时，介质对运动物体的阻力与速度成正比

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

阻力系数由物体的形状、大小、表面状况、介质的性质等决定

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$$

ω_0 —— 振动系统的固有圆频率

β —— 阻尼因子（阻尼常量）

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m},\ 2\beta = \frac{\gamma}{m}$$

讨论：三种典型情况

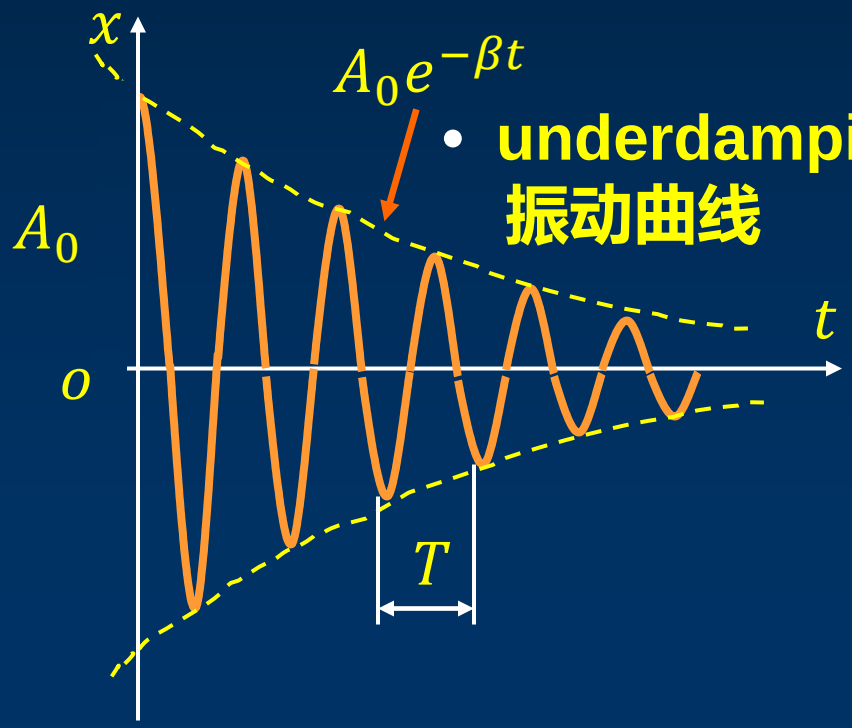
- **欠阻尼** $(\beta < \omega_0)$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}}$$

振幅按指数率随时间减少 —— 准周期性运动



- underdamping 振动曲线

- **欠阻尼过程中的能量关系**

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

$$E = E_0 e^{-2\beta t}$$

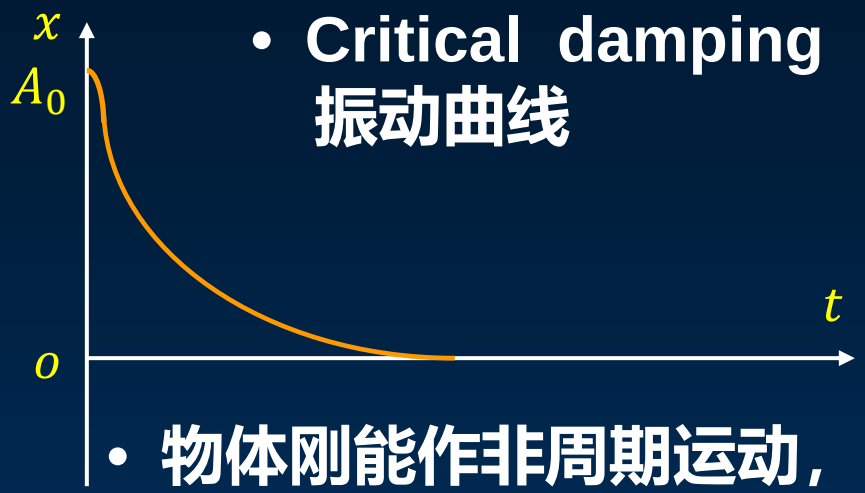
- **阻尼振动中，能量不断减少**

- **过阻尼** $(\beta > \omega_0)$



- Overdamping 振动曲线
- 物体作非周期运动，缓慢地回到平衡位置

- **临界阻尼** $(\beta = \omega_0)$



- Critical damping 振动曲线
- 物体刚能作非周期运动，最后回到平衡位置

- **过阻尼与临界阻尼的比较**

在临界阻尼下振子回到平衡位置而静止下来的时间最短。

二、受迫振动 (Forced vibration)

阻力 → 消耗系统能量 → 振幅衰减

若给系统施加外界周期性作用

系统补充能量 → 维持振动 → 阻力

设一驱动力 $F = F_0 \cos \omega t$ ➡ 振动系统

- 线性回复力
- 阻力
- 驱动力

➡ $-kx - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$

- 动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

当阻尼较小时

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\, t + \phi_0\right) + A \cos(\omega t + \phi)$$

减幅振动——暂态项　　等幅振动——定态项

经过一段时间后，受迫振动按简谐振动的规律变化

$x = A \cos(\omega t + \phi)$ ⟺ 与自由简谐振动有本质区别

• 可以证明

$$A=\frac{F_0}{\omega\sqrt{\gamma^2+(\omega m-\frac{k}{\omega})^2}}$$

$$\phi=tg^{-1}(\frac{-2\beta\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2})$$

• 与驱动力的频率有关　　• 与初始条件无关

• 当驱动力频率达到某一值时，振幅 A 达到极大值 ➡ 共振

1. 速度共振

$$x=A\cos(\omega t+\phi) \Rightarrow v=v_m\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

• 外力
- • 与物体运动同向 ➡ 驱动力作正功，输入能量
- • 与物体运动反向 ➡ 驱动力作负功，输出能量

若 $\omega m-\frac{k}{\omega}=0$ ➡ $v_m=\frac{F_0}{\gamma}=\frac{F_0}{2m\beta}$ 速度振幅最大

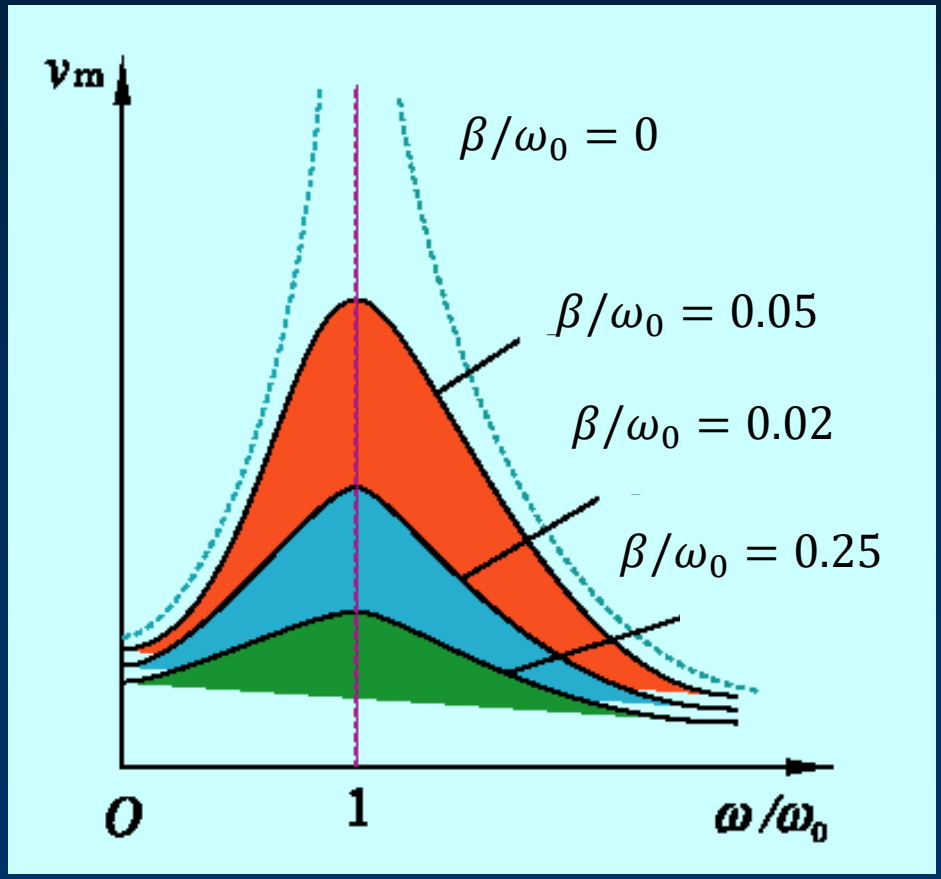
若 $\omega^2 = \frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ ➡ $\phi = -\frac{\pi}{2}$ ➡ $v = v_m \cos(\omega t)$

⇕

驱动力与振动系统速度始终保持同相 —— $F = F_0 \cos \omega t$

结论： 驱动力在整个周期内对振子做正功，始终给振子提供能量

速度共振 = 能量共振



2. 位移共振

$$A = \frac{F_0}{\omega\sqrt{\gamma^2 + (\omega m - \frac{k}{\omega})^2}}$$

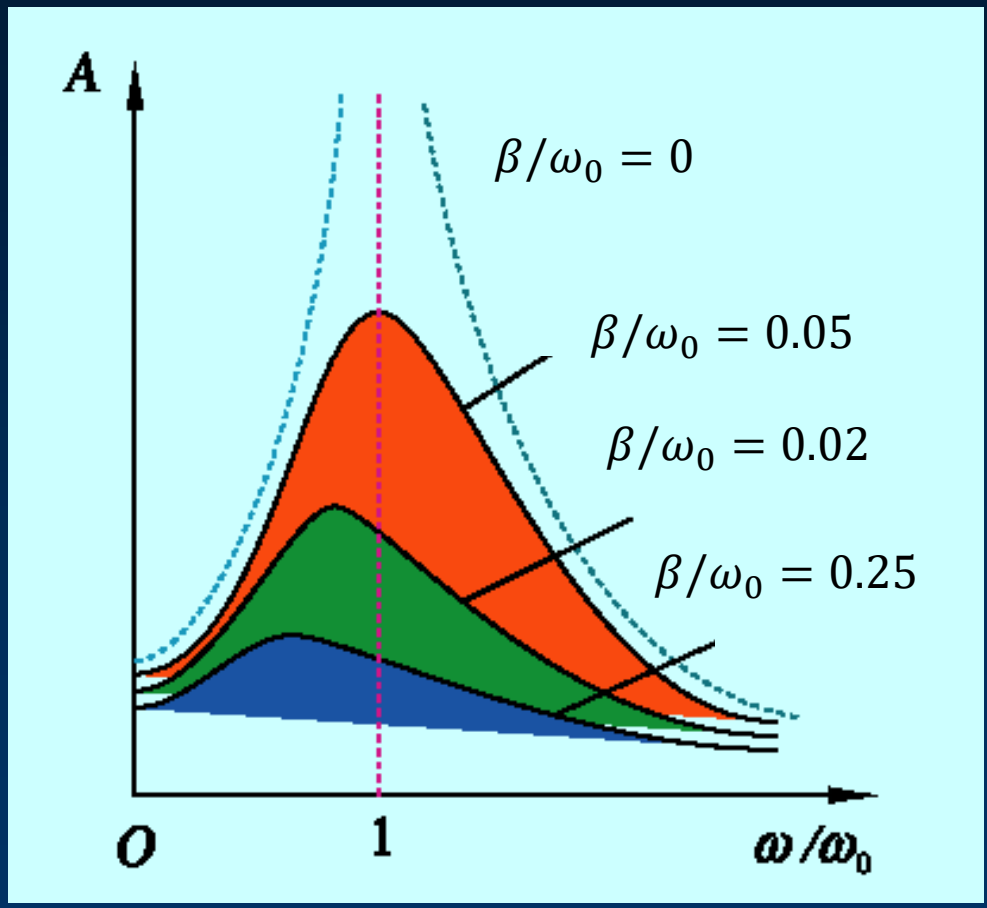
$\omega = ?$ —— 可使系统振幅实现最大值?

- 振幅的极值 $\dfrac{dA}{d\omega} = 0$

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\beta^2}$$

$$A_m = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0{}^2 - \beta^2}}$$

- **结论：** 当驱动力频率比系统固有频率小，并满足上述关系时，产生位移共振。











1940年7月1日 美国塔科马海峡桥的倒塌

机械振动

- **分析振动系统** —— **简谐振动**

$$f = -kx$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$E = E_k + E_p = C$$

- **建立动力学方程**

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \omega$$

- **求解运动学方程** $x = A\cos(\omega t + \phi)$

ω ,T ,ν **三者的关系**

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

- **确定运动学方程中的三个重要参量**

  振动曲线分析法 （两个以上简谐振动的相位关系的分析）

  旋转矢量法 —— **确定初相位较为方便**

  初始条件法

$$A=\sqrt{x_0^{\,2}+\frac{v_0^{\,2}}{\omega^2}} \qquad \tan\varphi=-\frac{v_0}{x_0\omega}$$

- **简谐振动的合成**

  同方向、同频率谐振动的合成 → 谐振动 A,φ

  同方向、不同频率谐振动的合成 → 拍 $\nu=|\nu_1-\nu_2|$

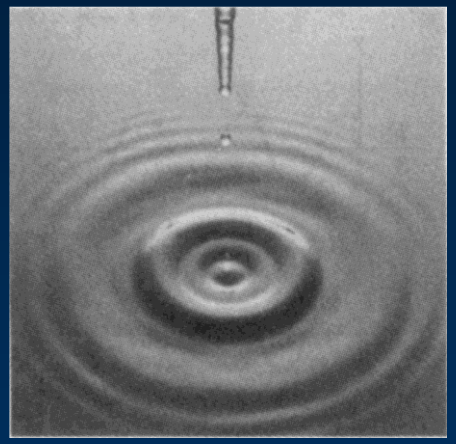
  不同方向、同频率谐振动的合成 → 谐振动、椭圆振动等

第14章 机械波

- **什么是波?**

  振动状态以一定速度在空间的传播就形成了**波**。

- **波的分类**



1. 机械波

   机械振动以一定速度在弹性介质中由近及远地传播出去，就形成**机械波**。

2. 电磁波

   变化的电场和变化的磁场在空中的传播过程形成**电磁波**。

3. 物质波

   物质波（也称概率波）是微观粒子的一种属性，具有完全不同的性质，遵从量子力学理论。

内 容

- 机械波的产生和传播（基本性质、基本描述）
- 平面简谐波（典型分析）
- 波的能量与强度
- 惠更斯原理（波动的几何描述）
- 波的叠加与干涉现象
- 驻波 （特殊的振动形态）
- 多普勒效应（波动的应用）

14-1 机械波的产生和传播

一、机械波的产生和传播

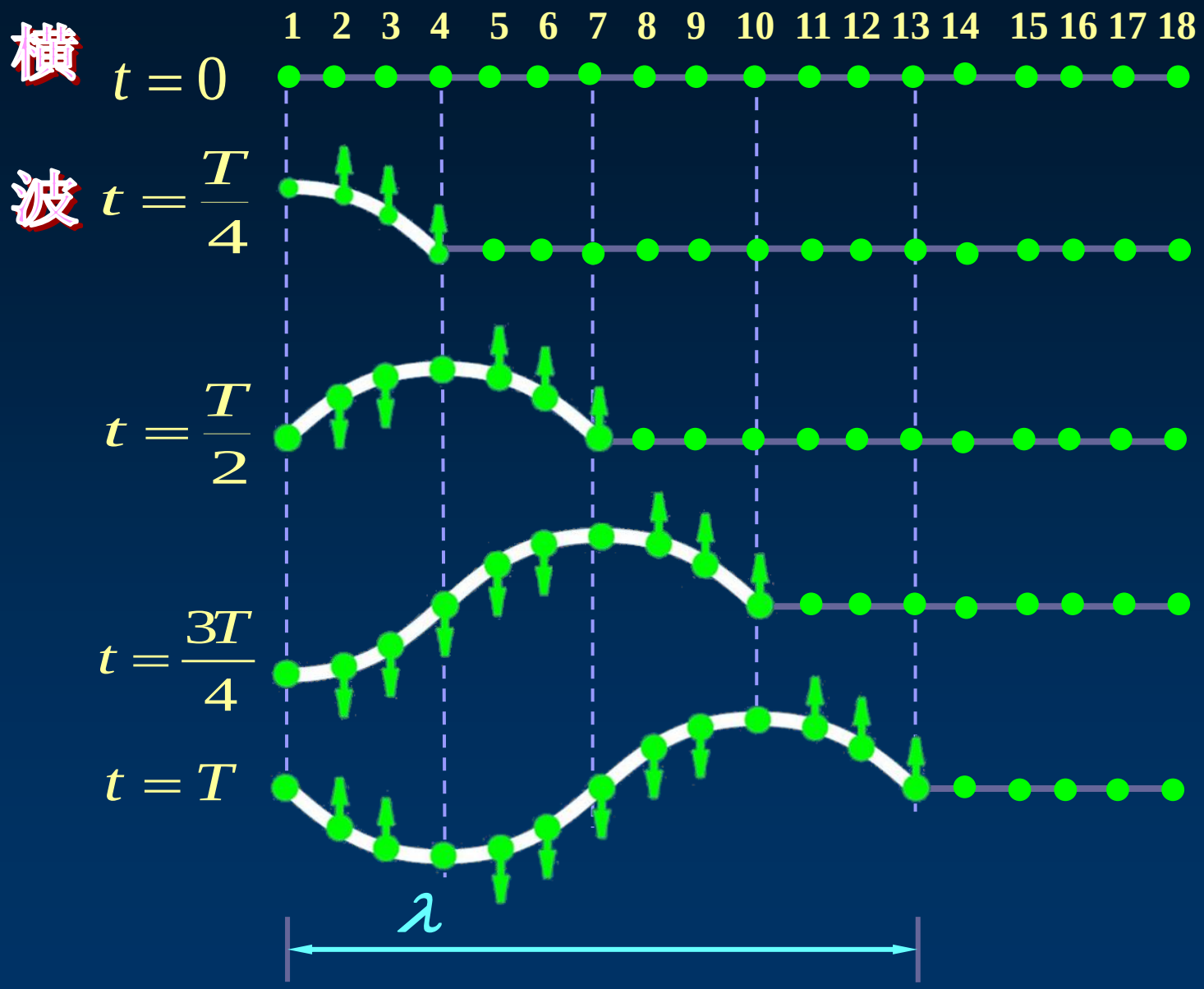
条件

- 波源：引起机械振动的物体
- 弹性媒质：承担传播振动状态的物质

回顾: 机械波的产生过程:

- 横波：媒质质点的振动方向与波传播方向相互垂直的波
- 纵波：媒质质点的振动方向和波传播方向相互平行的波

一般情况下,一个波源在媒质中可以同时产生横波与纵波。

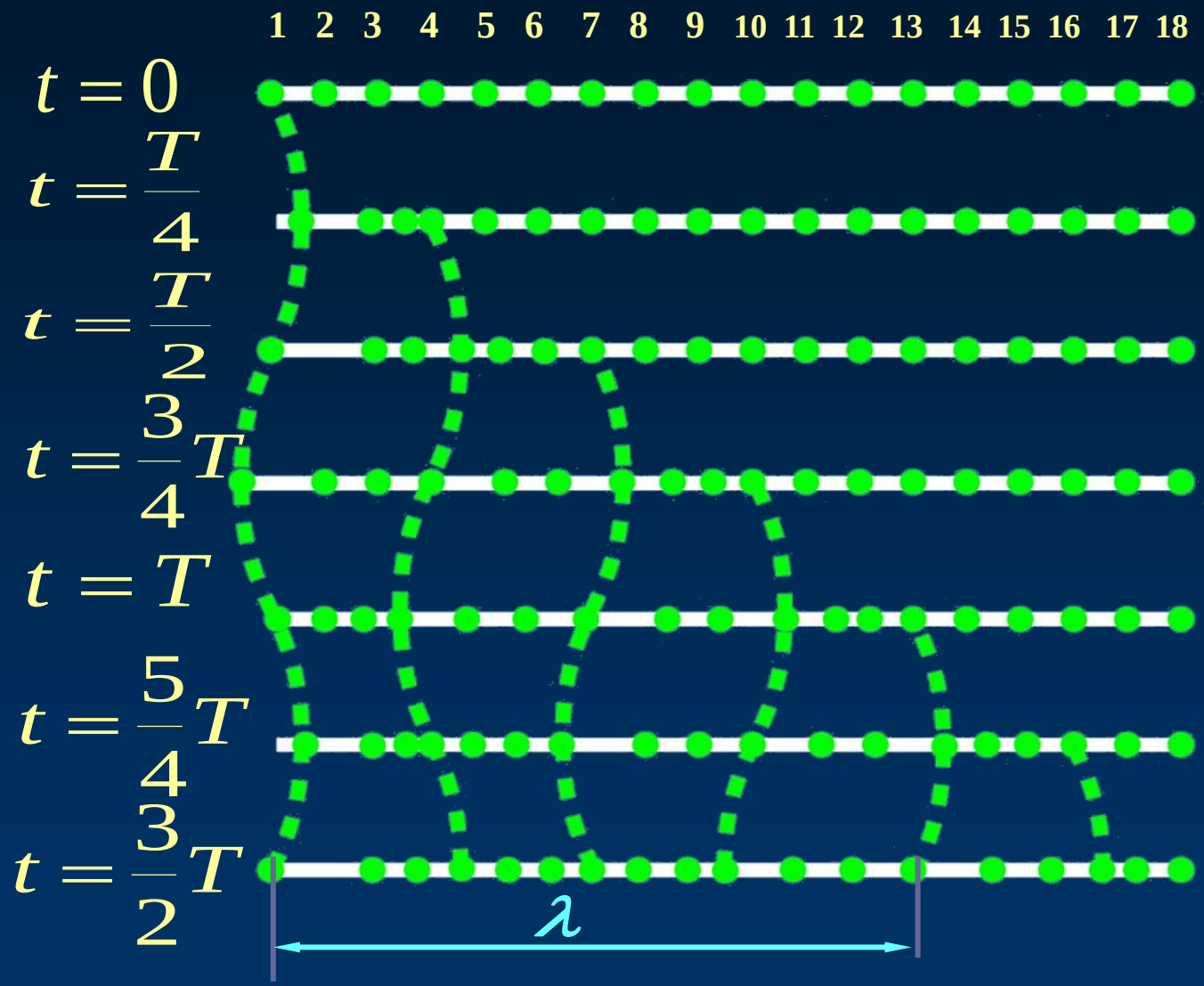

横
波
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
$t=0$
$t=\frac{T}{4}$
$t=\frac{T}{2}$
$t=\frac{3T}{4}$
$t=T$
λ

横波：质点振动方向 ⊥ 波传播方向

说明:

(1) 波动中各质点并不随波前进；

(2) 波动是振动状态(相位)的传播


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
$t=0$
$t=\frac{T}{4}$
$t=\frac{T}{2}$
$t=\frac{3}{4}T$
$t=T$
$t=\frac{5}{4}T$
$t=\frac{3}{2}T$
λ

纵　波



纵波：质点振动方向 // 波传播方向

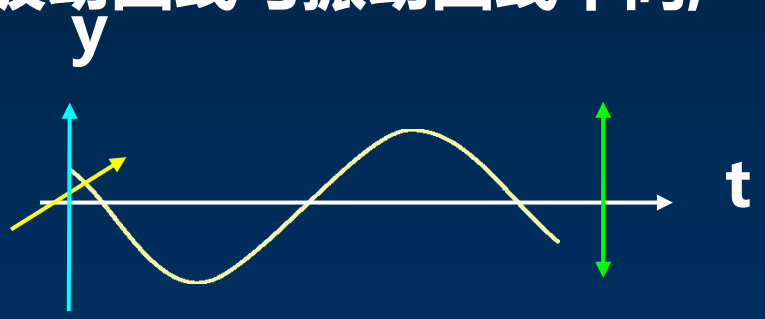
说明：

(1) 波动中各质点并不随波前进；

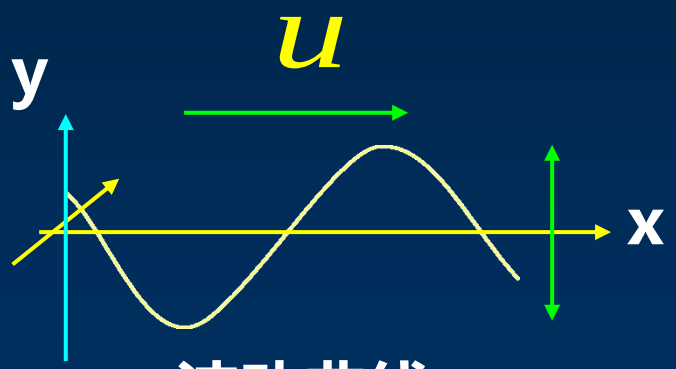
(2) 波动是振动状态(相位)的传播

结论

- 波动仅是质点振动状态的传播,各质点并不随波前进;
- 各个质点的相位依次落后, 波动是相位的传播;
- 在固体中，可以传播纵波和横波，
  在液体和气体中，只能传播纵波；
- 波动曲线与振动曲线不同;

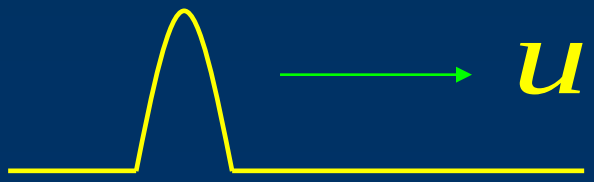


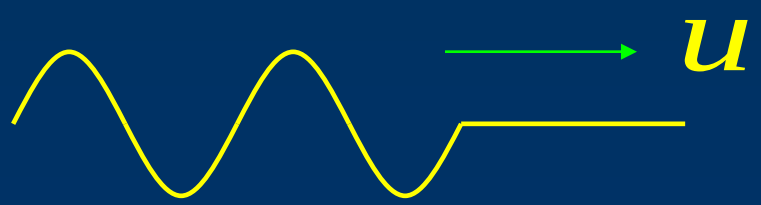
振动曲线



波动曲线

- 脉冲波和连续波的概念





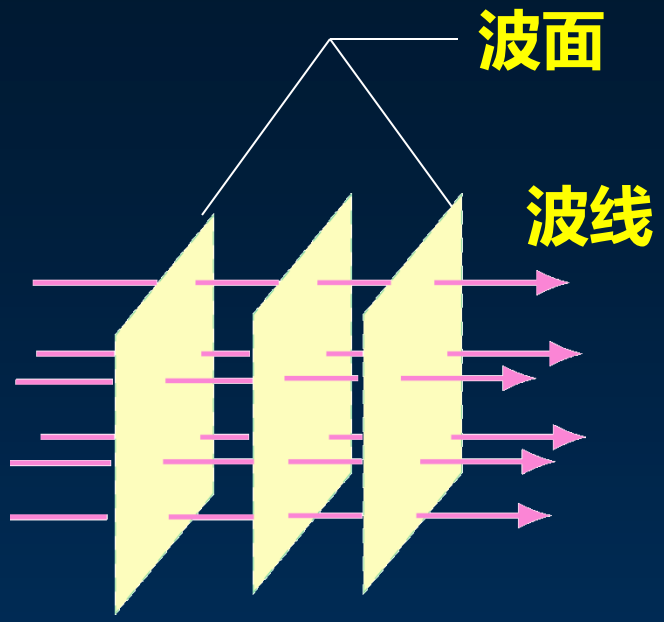
二、波动的基本描述

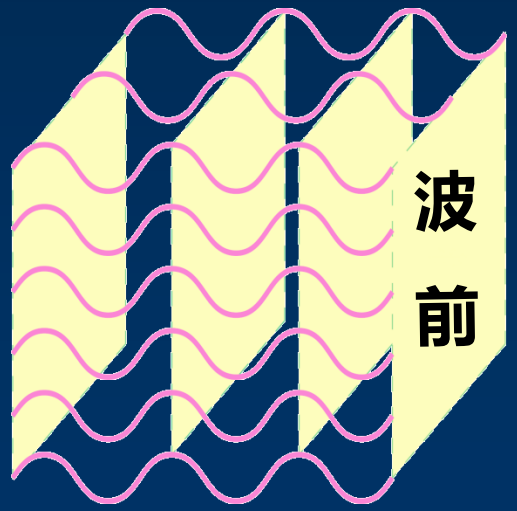
1. 波线，波面和波前

当波在连续媒质中由波源向外传播时，沿波的传播方向作的有向直线 —— **波线**

在波传播过程中，任一时刻媒质中各振动相位相同的点联结成的空间曲面 —— **波阵面（波面）**

在某一时刻，波传播到的最前面的波面 —— **波前**





2. 平面波，球面波，柱面波

- **平面波** —— 波阵面为平面
- **球面波** —— 波阵面为球面
- **柱面波** —— 波阵面为柱面